II. Joannis Keill *M. D. & in Academia* Oxonienſi *Aſtronomiæ Profeſſoris* Saviliani, *Obſervationes in ea quæ edidit Celeberrimus Geometra* Johannes Bernoulli *in Commentariis Phyſico Mathematicis* Pariſienſibus *Anno* 1710. *de inverſo Problemate Virium Centripetarum. Et ejuſdem Problematis ſolutio nova.*

NObiliſſimum eſt problema Datâ lege Vis centripetæ invenire Curvam quam deſcribit Mobile, de loco dato, ſecundum datam rectam,& cum data velocitate egrediens Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, ejus ſolutionem perfectam olim dedit Dominus *Newtonus* in *Principiis Philoſophiæ Mathematicis*. Hoc ipſum Problema denuo aggreſſus eſt vir clariſſimus & Geometra celeberrimus Dominus *Johannes Bernoulli* in Academia *Baſilienſi* Matheſeos Profeſſor *, qui non pauca eaque egregia ingenii ſui ſpecimina jam pridem edidit, quibus Geometriam reconditiorem non parum ditavit. Unde a tanti viri acumine novam pulchramque Problematis ſolvendi methodum expectabam. Geſtiebam itaque ſolutionem Bernoullianam perlegere, & cum Newtoniana comparare; quibus tandem diligentius perlectis & examinatis, hæc quæ ſequuntur annotavi.

Dominus Bernoulli eandem præmittit propoſitionem quam Newtonus problemati demonſtrando prius adhibuit: eſtque ea in *Principiis* XL, non minus pulchra quam demonſtratu facilis. Scil.

Si corpus cogente vi quacunque centripeta moveatur utcunque, & corpus aliud recta aſcendat vel deſcendat, ſintque eorum velocitates, in aliquo æqualium altitudinum caſu, æquales; velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.

* Vide Commentarios Phyſico-mathematicos Pariſienſes Anno 1710.

Hujus propositionis Demonstrationem Newtonianam ait Bernoullius esse nimis implicatam, & suam, quam simpliciorem vocat, ejus loco substituit. At pace tanti viri liceat mihi dicere, si quid discriminis sit inter demonstrationem Bernoullianam & Newtonianam, id in eo situm est, quod hæc multo facilior esse videtur minusque perplexa quam illa. *Fig.* I. Nam si centro *C* describantur circuli *D I*, *E K*, quorum intervallum *D E* est quam minimum, sintque corporum in *D* & *I* velocitates æquales, & ab *N* ad *I K* demittatur perpendiculum *N T*, fuse ostendit Newtonus vim acceleratricem secundum *D E*, esse ad vim acceleratricem secundum *I K* ut *I N* ad *I T*. Nimirum si vis secundum *D E* vel *I N* exponatur per rectas *D E* vel *I N*, vis illa secundum *I N* resolvitur in duas *T I*, *T N*, quarum illa solum quæ est ut *T I* motum secundum directionem *I K* accelerat: accelerationes autem seu velocitatum incrementa sunt ut vires & tempora quibus generantur conjunctim. At tempora ob æquales velocitates in *D* & *I*, sunt ut viæ descriptæ *D E*, *I K*; quare accelerationes in decursu corporum per lineas *D E* & *I K*, sunt ut *D E* ad *I T* & *D E* ad *I K* conjunctim; *i. e.* ut *D E* quad. quod est *I N* quad. ad rectang. $IT \times IK$. adeoque ob *I N* quad. $= IT \times IK$, incrementa velocitatum sunt æqualia: æquales igitur sunt velocitates in *E* & *K*, & eodem argumento semper reperientur æquales in æqualibus distantiis. Hæc est summa demonstrationis Newtoni quæ tam dilucide ab eo exponitur, ut inter propositiones elementares paucas faciliores invenies. At non sic procedit Dominus Bernoullius, sed illi sufficit dicere, Mechanicam ostendere vim secundum *D E* esse ad vim secundum *I K*, ut *I K* ad *D E*. Mechanicam etiam ostendere incrementa velocitatum esse in ratione virium & temporum conjunctim; & initio motus positis velocitatibus æqualibus tempora sunt ut viæ descriptæ *D E*, *I K*; & hinc, (argumento prorsus simili ei quo utitur Newtonus) concludit incrementum velocitatis, quod acquirit corpus dum describit *I K*, esse ad incrementum velocitatis dum describitur *D E*, ut $DE \times IK$ ad $IK \times DE$, & proinde velocitatum incrementa ubique in distantiis æqualibus esse æqualia.

At

At si Tyronibus facilem voluisset tradere demonstrationem, debuisset Propositionem Mechanicam citare, eamque ad præsentem casum accommodare. Et quidem pluribus verbis opus est, ut hoc fiat per theorema quod innuere videtur, in quo agitur de descensu Gravium in planis inclinatis: nullum enim est hic Planum datum quod recto corporum descensui obstat; immo tantum abest ut corpus à plano cohibeatur, ut è contra à Plano seu Tangente per vim quandam continuo retrahitur. Proculdubio igitur manifesta magis foret ejus ratiocinii vis, si demissis Mechanicæ propositionibus, rem omnem ex propriis principiis demonstrasset, uti fecit Newtonus. Nam resolvendo triang. rectang. KNI in duo triangula æquiangula, est KI ad IN ut IN ad IT, adeoque loco rationis IN ad IT ponere potuisset rationem KI ad IN vel ad DE.

Si de loco quovis A in recta AC cadat corpus, deque loco ejus E erigatur semper perpendicularis EG vi centripetæ proportionalis, sitque BFG linea curva quam punctum G perpetuo tangit; demonstrat Newtonus velocitatem corporis in loco quovis E esse ut Areæ curvilineæ $ABGE$ latus quadratum. Adeoque si velocitas dicatur v, erit v^2 ut Area $ABGE$: & si P sit altitudo maxima, ad quam corpus in Trajectoria revolvens, deque quovis ejus puncto eâ quam ibi habet velocitate sursum projectum ascendere possit: sitque quantitas A distantia corporis à centro, in alio quovis orbitæ puncto; & vis centripeta sit semper ut ipsius A dignitas quælibet, scil. ut A^{n-1}, Velocitas corporis in omni altitudine A erit ut $\sqrt{nP^n - nA^n}$.

Similiter Dominus Bernoullius ostendit, si distantia à centro dicatur x, velocitas v & vis centripeta φ, esse $v = \sqrt{ab - \int\varphi x}$ ubi ex Quadraturis constat esse Aream $ABGE = ab - \int\varphi x$. Perinde itaque est sive exprimatur quadratum velocitatis per Aream $ABGE$, sive per quantitatem huic æqualem $ab - \int\varphi x$. Et si vis centripeta φ sit ut nA^{n-1} seu $n\,x^{n-1}$, fit $ab = P^n$ &

---

[a] Vide prop. 39. & 40. Principiorum.

$\int \varphi x = A^n$, adeoque $ab - \int \varphi x$ eſt ut quantitas $P^n - A^n$.

Deſcribat corpus Curvam VK, vi centripeta tendente ad C, deturque circulus VXY, centro C intervallo quovis CV deſcriptus. Q ſit quantitas conſtans, atque $\frac{Q}{A} = z$. Sitque KI elementum Curvæ; IN vel DE elementum altitudinis, XY elementum arcus: demonſtrat Newtonus Elementum arcus ſeu XY exprimi poſſe per hanc formulam $\frac{Q \times IN \times CX}{AA\sqrt{ABGE - z^2}}$, Similiter ex præmiſſis Dominus Bernoullius, poſito Arcu $UX = z$, & altitudine ſeu diſtantia $= x$, elementum arcus ad hanc reducit formulam ſcil. $\dot{z} = \frac{a^2 c \dot{x}}{\sqrt{abx^4 - x^4 \int \varphi \dot{x} - a^2 c^2 x^2}}$ Et primo quidem aſpectu videbatur formula Newtoniana quodammodo ſimplicior Bernoullianâ, eo quod paucioribus conſtat terminis; at re diligentius exploratâ, vidi Bernoullianam formulam omnino cum Newtoniana coincidere; nec niſi in notatione quantitatum ab ea differre. Nam ſi pro $ab - \int \varphi \dot{x}$ ponatur $ABGE$, pro ac ponatur Q, & x pro A, a pro CX, & $\dot{x}$ pro IN, fit

$$\frac{a^2 c \dot{x}}{\sqrt{abx^4 - x^4 \int \varphi \dot{x} - a^2 c^2 x^2}} = \frac{Q \times CX \times IN}{\sqrt{A^4 \times ABGE - \frac{Q^2 A^4}{A^2}}} =$$

$\frac{Q \times CX \times IN}{AA\sqrt{ABGE - Q^2}}$ ſeu ponendo z^2 loco $\frac{Q^2}{A^2}$, (quod facit Newtonus commodioris notationis gratia,) Formula Bernoulliana evadit $\frac{Q \times CX \times IN}{A^2 \sqrt{ABGE - z^2}}$: unde conſtat formulam illam non magis à Newtoniana diſcrepare, quam verba Latinis literis expreſſa differunt ab iiſdem verbis ſcriptis in Græcis characteribus.

Poſt traditam generalem formulam; deſcendit Dominus Bernoullius ad caſum particularem, ubi vis centripeta eſt reciprocè

procè ut quadratum diſtantiæ; & per varias reductiones & operationes ſatis moleſtas, conſtructionem oſtendit Curvarum quæ urgente eâ vi centripeta deſcribi poſſunt, eaſque ad æquationes reducendo probat eſſe Sectiones Conicas. Deinde queritur Dominum Newtonum ſupponere ſine demonſtratione Curvas à tali vi deſcriptas eſſe Sectiones Conicas.

Impoſſibile eſt ut credat nullam Newtono notam fuiſſe hujus rei demonſtrationem; Noverit enim eum primum & ſolum fuiſſe qui hanc omnem de vi centripeta doctrinam geometricè tractavit, quique eam ad tantam perfectionem perduxit, ut poſt plures quam viginti annos, parum admodum à præſtantiſſimis Geometris ei additum ſit. Noverit etiam Bernoullius Newtonum, præter generalem problematis inverſi ſolutionem, oſtendiſſe modum quo formari poſſunt Curvæ, quæ vi centripeta decreſcente in triplicata diſtantiæ ratione deſcribuntur, adeoque alterum illum caſum ignorare non potuiſſe. Nec profecto intelligo qua ratione Bernoullius Newtono objiciat, eum hujus caſus demonſtrationem prætermiſiſſe; cum ipſe non pauca ſæpius propoſuit Theoremata, quorum demonſtrationes nuſquam dedit; & quidni liceat Newtono ad alia feſtinanti hoc idem facere. Interim in nova *Principiorum* Editione, facilior multo & magis clara, licet tribus verbis, extat hujus rei demonſtratio, quam eſt Bernoulliana.

Tandem Bernoullius ut neceſſitatem ſuæ demonſtrationis inverſi Problematis in hoc particulari caſu oſtendat, hæc addit. Conſiderandum eſt, inquit, quod vis quæ facit ut corpus in Spirali Logarithmica moveatur, debet eſſe reciprocè ut cubus diſtantiæ à centro; at non inde ſequitur talibus viribus ſemper deſcribi debere tales Curvas, cum ſimiles etiam vires facere poſſunt ut corpus in Spirali Hyperbolica moveatur.

Miror ſane quod Vir Cl. ſuſpicetur Newtonum talem unquam duxiſſe conſequentiam. Nam præter Spiralem logarithmicam, oſtendit Newtonus qua ratione aliæ Curvæ, numero infinitæ & diverſæ, formari poſſunt, quæ omnes deſcribantur eadem vi centripeta qua Spiralis Logarithmica; interque eas reponi debet hæc ipſa Spiralis Hyperbolica, ut in ſequentibus oſtendemus.

Exinde

Exinde autem concludit Newtonus Sectiones tantum Conicas necessario describi debere per vim centripetam quadrato distantiæ reciprocè proportionalem: Nempe quod Curvatura orbitæ cujuscunque ex datis velocitate, vi centripeta & positione Tangentis datur; datis autem umbelico, puncto contactus & positione tangentis, semper describi possit Sectio Conica quæ curvaturam illam datam habeat. Hoc à me ostensum est in Actis Philosophicis Londinensibus Anno 1708. In hac igitur Sectione, urgente illa vi corpus movebitur, & in nulla alia; cum corpus de eodem loco, secundum eandem directionem, eadem cum velocitate, & urgente eadem vi centripeta exiens, non possit diversas semitas describere.

Liceat jam mihi Dominum Bernoullium imitari, & inversum de vi centripeta problema longe diversa methodo resolvere, & ad casum particularem applicare; ubi scil. vis est reciprocè ut cubus distantiæ, simulque ostendere demonstrationem Cor. 3. prop. 41. *Principiorum* Newtoni.

Quod ut fiat, quædam ex iis quæ in Actis Philosophicis No. 317. exposui hic præmittenda sunt. *Fig.* II.

Sit VIL Curva quævis, quam corpus urgente vi centripeta ad centrum C tendente describit: hanc Curvam in duobus punctis infinitè vicinis I & K tangant rectæ IP, Kp, ad quas è centro demittantur perpendiculares CP, Cf; centro item C describantur KE, ID, & ducatur CI.

Erit vis centripeta ut Quantitas $\dfrac{Pp}{PC^3 \times IN}$ Quod Theorema licet in prædicto loco demonstravimus, ecce aliam ejus demonstrationem. Ex K ducantur Km ad CP & Kn ad CI parallelæ. Et ob æquiangula triangula ICP, IKN, nKm, Item que ob IKm & IpP æquiangula. Erit,

$$Ip \text{ vel } IP : IK :: pP : Km$$
$$PC : IP :: Km : mn$$
$$IN : IK :: mn : nK$$

unde ex æquo fiet $PC \times IN : IK^2 :: pP : nK$; & erit $nK = \dfrac{pP \times IK^2}{PC \times IN}$. Præterea tempus quo describitur arcus IK est ut

Area

Area ſeu triangulum ICK, vel ejus duplum $PC \times IK$; adeoque ſi tempus detur erit $PC \times IK$ quantitas conſtans. Dato autem tempore, vis centripeta eſt ut lineola Kn quæ ſub urgente vi illa deſcribitur, adeoque vis centripeta eſt ut lineola illa Kn ducta in quantitatem conſtantem $\frac{1}{PC^2 \times IK^2}$, hoc eſt, erit vis centripeta ut $\frac{1}{PC^2 \times IK^2} \times \frac{Pp \times IK^2}{PC \times IN}$ ſeu ut quantitas $\frac{Pp}{PC^3 \times IN}$. Quod erat demonſtrandum.

Velocitas corporis in quovis loco eſt ut via in minimo quovis tempore percurſa directè & ut tempus illud inversè; adeoque & ut $IK \times \frac{1}{PC \times IK}$, hoc eſt, velocitas erit reciprocè ut Perpendicularis è centro in Tangentem.

Si diſtantia corporis à centro dicatur x, & Perpendicularis in tangentem p, erit $IN = \dot{x}$ & $Pp = \dot{p}$ & vis centripeta exponi poteſt per quantitatem $\frac{f^4 \dot{p}}{p^3 \dot{x}}$, aſſumendo quantitatem quamlibet pro f^4.

Adeoque ſi cum Domino Bernoullio vim centripetam nominemus φ, erit $\frac{f^4 \dot{p}}{p^3 \dot{x}} = \varphi$ & $\frac{f^4 \dot{p}}{p^3} = \dot{x} \varphi$; & capiendo harum quantitatum fluentes erit $\frac{f^4}{2p^2} =$ Fluenti quantitatis $\dot{x} \varphi$

At cum velocitas corporis ſit reciprocè ut perpendicularis p, ejus quadratum exponi poteſt per $\frac{f^4}{2p^2}$. Si itaque velocitas dicatur v, erit $v^2 = \frac{f^4}{2p^2} =$ Fluenti quantitatis $\dot{x}\varphi$. Quod ſi A ſit locus de quo cadere debet corpus ut acquirat in D vel I veloci-

velocitatem v, deque loco corporis D erigatur perpendicularis $DF = \varphi$ erit rectangulum $DE \times DF = \dot{x}\varphi$. Sit jam BFG linea curva cujus ordinatæ exponant vires centripetas, seu quantitates φ. Fluens quantitatis $\dot{x}\varphi$ erit Area curvilinea $ABFD = v^2 = \frac{f^4}{2p^2}$, adeoque erit v ut Areæ $ABFD$ latus quadratum. Quod si velocitas ea sit quæ ab infinita distantia cadendo acquiritur, erit v^2 seu fluens ipsius $\dot{x}\varphi$ æquale areæ $ODFO$ indefinitè protensæ.

Hinc semper dabitur quantitas p in terminis finitis, quando Area illa curvilinea terminis finitis exponi potest. Sit, verbi gratia, vis centripeta reciprocè ut distantiæ dignitas m, hoc est, sit $\dot{x}\varphi = \frac{g\dot{x}}{x^m}$. Si velocitas corporis sit ea quæ acquiritur cadendo ab infinita distantia, erit $v^2 = \frac{g}{\overline{m-1} \times x^{m-1}} = \frac{f^4}{2p^2}$ & in hisce omnibus casibus Area indefinitè protensa est quantitas finita. Potest autem corpus in trajectoria revolvi velocitate cujus quadratum vel majus fieri potest, vel minus quantitate $\frac{g}{\overline{m-1} \times x^{m-1}}$, vel huic æquale. Adeoque erit $v^2 = \frac{f^4}{2p^2} =$

$$\frac{g}{\overline{m-1}\,x^{m-1}} \pm e^2$$

Hinc urgentibus his viribus, tria Curvarum genera describi possunt; prout e^2 est quantitas positiva vel negativa vel nulla.

V. G. Si Velocitas major sit ea quæ acquiritur ab infinita distantia cadendo, fit $\frac{f^4}{2p^2} = \frac{g}{\overline{m-1}\,x^{m-1}} + e^2$: si velocitas sit minor erit $\frac{f^4}{2p^2} = \frac{g}{\overline{m-1}\,x^{m-1}} - e^2$: si æqualis, erit $\frac{f^4}{2p^2} = \frac{g}{\overline{m-1}\,x^{m-1}}$

Sit

Sit $\frac{1}{2} f^4 = a^2 e^2$ & $\frac{1}{m-1} \times g = b^2 e^2$. Et si velocitas corporis sit ea quæ ab infinito cadendo acquiritur, erit $p^2 = \frac{a^2 x^{m-1}}{b^2}$ seu $p = \frac{a x^{\frac{m-1}{2}}}{b}$.

At si velocitas major sit aut minor hac velocitate, fiet uti ostensum est $\frac{f^4}{2p^2} = \frac{g}{\overline{m-1}\, x^{m-1}} \pm e^2 = \frac{\frac{1}{m-1} g \pm e^2 x^{m-1}}{x^{m-1}}$. Unde pro $\frac{1}{2} f^4$ & $\frac{g}{m-1}$ ponendo earum valores $a^2 e^2$ & $b^2 e^2$, erit $\frac{a^2 e^2}{p^2} = \frac{b^2 e^2 \pm e^2 x^{m-1}}{x^{m-1}}$ seu $\frac{a^2}{p^2} = \frac{b^2 \pm x^{m-1}}{x^{m-1}}$, & fiet $p^2 = \frac{a^2 x^{m-1}}{b^2 \pm x^{m-1}}$.

Adeoque si Vis centripeta sit reciprocè ut cubus distantiæ, hoc est, si sit $m = 3$ & $m - 1 = 2$. Erit $p^2 = \frac{a^2 x^2}{b^2}$, vel $p^2 = \frac{a^2 x^2}{b^2 + x^2}$, vel denique $p^2 = \frac{a^2 x^2}{b^2 - x^2}$.

In primo casu constat Curvam esse Spiralem Logarithmicam: nam sit $p = \frac{a x}{b}$, & $b : a :: x : p$. adeoque ob constantem rationem b ad a, erit angulus CIP ubique constans.

Ponamus jam esse $p^2 = \frac{a^2 x^2}{b^2 + x^2}$ & ex hac suppositione tres oriuntur diversæ Curvarum species, prout a major est quam b, aut ei æqualis, aut minor. *Fig.* III.

Et primo sit a major quàm b. Centro C & ad distantiam quamvis datam describatur circulus HTX, cui rectæ CK, CI productæ occurrant in T & X. Et est $IN^2 : KN^2 :: IP^2 : PC^2$

 & ita

& ita $CP^2 - PC^2 : PC^2 :: x^2 - p^2 : p^2 :: x^2 - \frac{a^2x^2}{b^2+x^2} : \frac{a^2x^2}{b^2+x^2} :: 1 - \frac{a^2}{b^2+x^2} : \frac{a^2}{b^2+x^2} :: b^2+x^2-a^2 : a^2$. Quare erit $\sqrt{x^2+b^2-a^2} : a :: IN : KN : \dot{x} : \frac{a\dot{x}}{\sqrt{x^2+b^2-a^2}} = KN$. Et quoniam est a major quam b, erit $b^2 - a^2$ quantitas negativa. Sit illa $-c^2$, unde fit $KN = \frac{a\dot{x}}{\sqrt{x^2-c^2}}$. Dicatur radius circuli HYh, & est $CK : KN :: CY : YX$ hoc est $x : \frac{a\dot{x}}{\sqrt{x^2-c^2}} :: h : \frac{ha\dot{x}}{x\sqrt{x^2-c^2}} = YX = \dot{y}$, si arcus HY vocetur y.

Sit $x = \frac{c^2}{z}$ unde $\dot{x} = -\frac{c^2\dot{z}}{z^2}$ & $\frac{\dot{x}}{x} = -\frac{\dot{z}}{z}$. Item erit $x^2 - c^2 = \frac{c^4}{z^2} - c^2 = \frac{c^4 - c^2z^2}{z^2} = \frac{c^2}{z^2} \times \overline{c^2 - z^2}$: unde $\sqrt{x^2 - c^2} = \frac{c}{z} \times \sqrt{c^2 - z^2}$: quibus valoribus substitutis, erit $\frac{ha\dot{x}}{x\sqrt{x^2-c^2}} = \frac{-ha\dot{z}}{c\sqrt{c^2-z^2}}$ Sit $a : c :: n : 1$. hoc est, sit $a = nc$, & fiet XY seu $\dot{y} = -\frac{nh\dot{z}}{\sqrt{c^2-z^2}}$. Est verò $\frac{nh\dot{z}}{\sqrt{c^2-z^2}}$ ad $\frac{c\dot{z}}{\sqrt{c^2-z^2}}$ ut nh ad c; hoc est in ratione data: adeoque eorum fluentes, si simul incipiunt, erunt in eadem ratione, hoc est erit HY seu y ad fluentem quantitatis $\frac{c\dot{z}}{\sqrt{c^2-z^2}}$ ut nh ad c.

Quod si centro C radio $CV = c$ describatur circulus VL, & CG sit $= z$, & $no = \dot{z}$, fiet arcus $mn = \frac{c\dot{z}}{\sqrt{c^2-z^2}}$ = fluxioni arcus Qm, quando fluxio est quantitas positiva: sed quando est nega-

tiva

tiva, ejus fluens est arcus Vm prioris complementum. Arcus enim ejusque complementum eandem habent quantitatem fluxionem denotantem, diversis tantum signis affectam ; quia crescente uno decrescit alter.

Hinc est HT ad Vm ut nh ad c: sed est CV ad CH ut Ve: HT, hoc est $c : h :: Ve : \frac{h \times Ve}{c} = HT$, quare erit $\frac{h \times Ve}{c}$: $Vm :: nh : c$, unde $Ve : Vm :: n : 1$.

Præterea ex natura circuli erit $CG : CV :: CV : CT$, quando mT circulum tangit : hoc est erit $z : c :: c : \frac{c^2}{z} = CT = x$. Hinc si capiatur angulus VCe ad angulum VCm ut n ad 1, & producatur Ce ad K ut sit CK = secanti CT, erit K punctum in Curvâ quæsitâ.

Hic obiter notandum est, si n sit numerus, hoc est si sit a ad c vel a ad $\sqrt{a^2 - b^2}$ ut numerus ad numerum, Curva VI fiet Algebraica: nam in hoc casu relatio mG ad sinum anguli VCe æquatione definitur, & inde habebitur relatio sinus anguli VCe ad CT vel CK per æquationem determinatam, & inde demum dabitur æquatio quæ exprimet relationem inter ordinatam & interceptam à puncto C incipientem. Harum Curvarum ordines & gradus in Scala æquationum Algebraica diversi erunt pro magnitudine numeri n. In his omnibus Curvis sic descriptis Asympoti positio hac ratione determinatur: Fiat angulus VCL ad rectum angulum ut n ad 1. In eo angulo distantia corporis à centro evadit infinita. Jam quad. perpendicularis in Tangentem $PC^2 = \frac{a^2 x^2}{b^2 + x^2}$, ubi x est infinita, fit $PC^2 = \frac{a^2 x^2}{x^2}$, seu $PC = a$. Ducatur itaque CR ad CL perpendicularis & æqualis rectæ a, & si per R ducatur RS rectæ CL parallela, hæc Curvam tanget ad infinitam distantiam, seu erit Curvæ Asymptotos.

Si corpus in quavis harum Curvarum descendendo, ad Apsidem imam pervenerit ; Hinc rursus ascendet in infinitum,

 &

& aliam Curvam priori similem, seu potius ejusdem Curvæ similem portionem, ascendendo describet.

Curvæ hæ possunt pluribus revolutionibus circa centrum torqueri, priusquam ad Asymptoton convergere incipiant, & motus angularis rectæ CK erit æqualis totidem rectis quot numerus n constat Unitatibus. *v. g.* si n sit 100, perficientur viginti quinque integræ revolutiones priusquam distantia à centro evadat infinita.

Aucto numero n, eadem manente a, minuitur c: est enim $\frac{a}{n} = c$ & $\frac{a^2}{n^2} = c^2 = a^2 - b^2$, unde fiet $\overline{n^2 - 1} \times a^2 = n^2 b^2$. Et proinde fiet $a^2 : b^2 :: n^2 : n^2 - 1$; adeoque si b^2 ad æqualitatem accedat ipsius a^2, perveniet quoque $n^2 - 1$ ad rationem æqualitatis cum n^2, & proinde augebitur n & in eadem ratione minuetur c. Ponatur itaque esse b^2 fere æquale ipsi a^2; adeo ut cum differentia sit infinite parva, fiat n numerus infinite magnus, & radius circuli c fiet infinite parvus, seu circulus in suum centrum contrahetur. At sic evanescente c, non pariter evanescit CT, si angulus VCM sit propemodum rectus: nam in omni circulo, etiam minimo, secans anguli recti est quantitas infinita. Curva itaque hæc, ob n numerum infinitum, infinitis numero revolutionibus centrum ambibit, priusquam ad Asymptoton convergere incipiet.

Evanescente autem c fit $b = a$ & $p = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + a^2}}$. Et quoniam in omni casu est $\dot{y} = \frac{ha\dot{x}}{x\sqrt{x^2 + c^2}}$, evanescente c fiet $\dot{y} = \frac{ha\dot{x}}{x^2}$, unde capiendo Fluentes fiet $y = \frac{ha}{x}$ seu $xy = ha =$ datæ quantitati. *Fig.* IV.

Hæc Curva est Spiralis Hyperbolica, quæ plures habet notabiles proprietates. Si ducatur radius quilibet CIT Curvæ occurrens in I, & peripheriæ circuli in T, & ex C ad CI excitetur perpen-

perpendicularis CT, atque IT tangat Curvam in I, & rectæ CT occurrat in T: erit CT constans recta, æqualis scil. arcui VE; qua proprietate Logarithmicam æmulatur, cum CT Curvæ Subtangens dici possit. Sit enim Radius circuli $CE = h$, arcus $VE = a$, dicatur CI x & VT sit y. Quia est $ha = x \times y$ erit $\frac{ha}{x} = y$ & $\frac{ha\dot{x}}{x^2} = \dot{y}$. Porro est $CT : CI :: TX : NK$ hoc est $h : x :: \frac{ha\dot{x}}{x^2} : NK$: quæ proinde est $\frac{a\dot{x}}{x}$. Et quoniam est $IN : NK :: CI : CT$. hoc est $\dot{x} : \frac{a\dot{x}}{x} :: x : CT$, erit $CT = a$.

Si centro C, intervallo quovis CG, describatur circuli arcus GF, hic arcus inter rectam CV & curvam interceptus erit semper æqualis constanti rectæ CT vel a. Nam quoniam est $VL \times CF = CV \times VE$, erit $VL : VE :: CV : CF :: VL : GF$ unde æquantur VE & GF. Si ad CG ex C excitetur normalis $CR = VE$ vel FG vel a, & per R agatur RS rectæ CV parallela, erit RS Curvæ Asymptotos. Nam est recta MS æqualis arcui GF, & proinde FS distantia Curvæ ab RS est semper æqualis excessui quo arcus superat suum sinum: at cum distantia crescat in infinitum, excessus ille minuetur in infinitum, & fiet tandem data quavis recta minor, & proinde RS erit Curvæ Asymptotos.

Sit jam b major quam a; & similiter, ut in priore casu, invenietur $KN = \frac{a\dot{x}}{\sqrt{x^2+b^2-a^2}}$: at quoniam b superat a, erit $c^2 = b^2 - a^2$ quantitas positiva, & KN fiet $= \frac{a\dot{x}}{\sqrt{x^2+c^2}}$ & ponendo radium circuli $HT = h$, invenietur $XT = \frac{ha\dot{x}}{x\sqrt{x^2+c^2}}$. Ponatur $x = \frac{c^2}{z}$, & erit $\dot{x} = -\frac{c^2\dot{z}}{z^2}$ & $\frac{\dot{x}}{x} = -\frac{\dot{z}}{z}$. Erit quoque $x^2 = \frac{c^4}{z^2}$ & $x^2 + c^2 = \frac{c^4}{z^2} + c^2 = \frac{c^4 + c^2z^2}{z^2} = \frac{c^2}{z^2} \times \overline{c^2 + z^2}$: unde

$\sqrt{x^2+c^2} = \frac{c}{z} \times \sqrt{c^2+z^2}$. His itaque valoribus substitutis fit $\frac{h a \dot{x}}{x\sqrt{x^2+c^2}} = -\frac{h a \dot{z}}{c\sqrt{c^2+z^2}} = -\dot{y}$. Nam tale sumi potest initium arcus HY, ut simul cum Fluente quantitatis $\frac{-h a \dot{z}}{c\sqrt{c^2+z^2}}$ crescat & decrescat. Fiat $nc = a$ & erit $\frac{n h \dot{z}}{\sqrt{c^2+z^2}} = \dot{y}$, & $\frac{\frac{1}{2} n h^2 \dot{z}}{\sqrt{c^2+z^2}} = \frac{1}{2} h\dot{y} =$ sectori CXY.

Est autem $\frac{\frac{1}{2} n h^2 \dot{z}}{\sqrt{c^2+z^2}} : \frac{\frac{1}{2} c^2 \dot{z}}{\sqrt{c^2+z^2}} :: nh^2 : c^2$, hoc est in data ratione. Adeoque erit sector CXY ad $\frac{\frac{1}{2} c^2 \dot{z}}{\sqrt{c^2+z^2}}$ semper in data ratione. Harum itaque quantitatum fluentes erunt in eadem ratione, cum simul incipere ponantur. Fluens autem sectoris CXY est sector CVY, & fluens quantitatis $\frac{\frac{1}{2} c^2 \dot{z}}{\sqrt{c^2+z^2}}$ est sector Hyperbolæ, quod sic ostenditur. *Fig.* V.

Centro C semiaxe transverso $CV = c$ describatur Hyperbola æquilatera, & ex duobus punctis vicinis D & F ordinentur ad axem conjugatum rectæ DB, EF; ducantur item CD, CF. Et incrementum seu fluxio trianguli BCD æquale erit $BE \times BD -$ sectore DCF: unde sector DCF (qui est Fluxio sectoris CVD) æqualis erit $BE \times BD -$ incremento trianguli BCD. Et si BC dicatur z, ob Hyperbolam, est $BD^2 = BC^2 + CV^2 = z^2 + c^2$: unde $BD = \sqrt{c^2+z^2}$, & $BE \times BD = \dot{z} \times \sqrt{c^2+z^2}$. Triangulum autem BCD est $\frac{1}{2} z \times \sqrt{c^2+z^2}$, cujus fluxio est $\frac{1}{2}\dot{z} \times \sqrt{c^2+z^2} + \frac{\frac{1}{2}\dot{z} \times z^2}{\sqrt{c^2+z^2}}$. Subtrahatur hæc quantitas ab $\dot{z} \times \sqrt{c^2+z^2}$, & restabit sector Hyperbolæ minimus CDF

=

$= \frac{1}{2}\dot{z} \times \sqrt{c^2 + z^2} - \frac{\frac{1}{2}\dot{z} \times z^2}{\sqrt{c^2 + z^2}} = \frac{\frac{1}{2}\dot{z} \times \overline{c^2 + z^2} - \frac{1}{2}\dot{z} \times z^2}{\sqrt{c^2 + z^2}} =$

$\frac{\frac{1}{2}c^2 \dot{z}}{\sqrt{c^2 + z^2}}$. Adeoque fluens ſectoris CDF eſt æqualis fluenti quantitatis $\frac{\frac{1}{2}c^2 \dot{z}}{\sqrt{c^2 + z^2}}$. Proinde erit ſector CVD fluens quantitatis $\frac{\frac{1}{2}c^2 \dot{z}}{\sqrt{c^2 + z^2}}$. Præterea DT recta tangat Hyperbolam & occurrat Axi conjugato in T. Eſt ex natura Hyperbolæ $BC : CV :: CV : CT$, hoc eſt $z : c :: c : \frac{c^2}{z} = CT = x$. Atque hinc oritur conſtructio quæ ſequitur. *Fig.* VI.

Centro C ſemiaxe tranſverſo CV, deſcribatur Hyperbola æquilatera Vm, item circulus Ve. Capiatur ſector circularis CVe ad ſectorem Hyperbolicam CVm ut n ad 1; tangat Hyperbolam in m recta Tm, occurrens Axi conjugato in T: producatur Ce ad k ut ſit $Ck = CT$, & punctum k erit in Curva quæſitâ. Nempe talis eſt ea Curva, ut ſi Ck dicatur x, Perpendicularis à C in tangentem ejus demiſſa erit ſemper æqualis $\frac{ax}{\sqrt{b^2 + x^2}}$. Quando x eſt infinita evaneſcit b^2, & perpendicularis fit $= a$, & tunc coincidit CR cum CV. Si itaque capiatur in axe conjugato $CR = a$, & ducatur RS ipſi CV parallela, erit hæc Curvæ Aſymptotos.

Si eo uſque augeatur a ut fiat quantitas $b^2 - a^2$ infinite parva, tunc evaneſcet c^2, & quantitas $\frac{ha\dot{x}}{x\sqrt{x^2 + c^2}}$ fit $\frac{ha\dot{x}}{x^2} = \dot{y}$. Unde ſi capiantur harum quantitatum fluentes, habebimus $\frac{ha}{x} = y$, & $ha = xy$, hoc eſt rectangulum ſub arcu circulari & diſtantia Curvæ à centro erit ſemper data quantitas; atque hac ratione migrabit curva in ſpiralem Hyperbolicam. Eſt itaque ſpiralis Hyperbolica Curva media ſeu quaſi limes, inter eas Curvas quæ conſtruuntur per ſectores circulares & eas quæ conſtruuntur per ſectores Hyperbolicos. Itaque ſpiralis illa Hyperbolica concipi poteſt formari vel per ſectorem Circuli aut Ellipſis, vel per ſectorem Hyperbolæ, cujus Axis tranſverſus minuitur in infinitum, & in eadem ratione augetur numerus n.

Ad eum jam devenimus caſum ubi velocitas corporis minor eſt eâ quæ acquiritur cadendo ab infinita diſtantia, & ubi $p^2 = \frac{a^2 x^2}{b^2 - x^2}$. Et hic ſimili ratiocinio ac in priori caſu, invenietur $KN = \frac{a\dot{x}}{\sqrt{b^2 - a^2 - x^2}}$, ubi neceſſe eſt ut ſit b^2 majus quam a^2. Hinc ſi $b^2 - a^2$ dicatur c^2, ſit $KN = \frac{a\dot{x}}{\sqrt{c^2 - x^2}}$; & proinde XY ſeu $\dot{y} = \frac{ha\dot{x}}{x\sqrt{c^2 - x^2}}$.

Sit jam $x = \frac{c^2}{z}$, & fiet $\frac{\dot{x}}{x} = - \frac{\dot{z}}{z}$ ſeu $\frac{ha\dot{x}}{x} = - \frac{ha\dot{z}}{z}$. & $c^2 - x^2$ erit $= \frac{c^2}{z^2} \times z^2 - c^2$, quibus valoribus ſubſtitutis fit $\frac{-ha\dot{z}}{c\sqrt{z^2 - c^2}} = \frac{ha\dot{x}}{x\sqrt{x^2 - c^2}} = -\dot{y}$. Nam tale ponendum eſt initium arcus VX, ut ſimul cum fluente quantitatis $\frac{ha\dot{z}}{c\sqrt{z^2 - c^2}}$ incipiat: unde erit $\frac{\frac{1}{2}h^2 a\dot{z}}{c\sqrt{z^2 - c^2}} = \frac{1}{2}h\dot{y} =$ ſectori $CXY = \frac{\frac{1}{2}nh^2\dot{z}}{\sqrt{z^2 - c^2}}$, ponendo $nc = a$. Eſt vero $\frac{\frac{1}{2}nh^2\dot{z}}{\sqrt{z^2 - c^2}}$ ad $\frac{\frac{1}{2}c^2\dot{z}}{\sqrt{z^2 - c^2}}$ ut nh^2 ad c^2, hoc eſt in ratione conſtanti. Quare harum quantitatum Fluentes ſunt in eadem ratione, hoc eſt Fluens quantitatis $\frac{1}{2}h\dot{y}$ ſeu $\frac{\frac{1}{2}nh^2\dot{z}}{\sqrt{c^2 - z^2}}$ erit ad fluentem quantitatis $\frac{\frac{1}{2}c^2\dot{z}}{\sqrt{z^2 - c^2}}$ ut nh^2 ad c^2. Eſt autem fluens quantitatis

$\frac{1}{2}hy =$ sectori CVX, & Fluens quantitatis $\frac{\frac{1}{2}c^2\dot{z}}{\sqrt{z^2-c^2}}$ est sector Hyperbolæ, quod sic ostenditur. *Fig.* VII.

Centro C semiaxe transverso $CV = c$ describatur Hyperbola æquilatera, & ex duobus punctis infinite vicinis B & D ad axem ordinentur duæ rectæ BE, DF; ducantur item CB, CD. Et erit Fluxio seu incrementum trianguli $CBE =$ triangulo $CBD + BE \times EF$; unde triangulum CBD, seu sector minimus CBD, erit $=$ incremento trianguli $CBE - BE \times EF$. Dicatur $CE\ z$, & erit $BE = \sqrt{z^2 - c^2}$, & $BE \times EF = \dot{z}\sqrt{z^2-c^2}$. Est quoque triangulum $CBE = \frac{1}{2}z\sqrt{z^2-c^2}$, cujus Fluxio est $\frac{1}{2}\dot{z} \times \sqrt{z^2-c^2} + \frac{\frac{1}{2}\dot{z} \times z^2}{\sqrt{z^2-c^2}}$; à quo si subtrahatur quantitas $\dot{z} \times \sqrt{z^2-c^2}$, fit sector minimus $CBD =$ $\frac{\frac{1}{2}\dot{z} \times z^2}{\sqrt{z^2-c^2}} - \frac{1}{2}\dot{z} \times \sqrt{z^2-c^2} = \frac{\frac{1}{2}\dot{z} \times z^2 - \frac{1}{2}\dot{z} \times \overline{z^2 - c^2}}{\sqrt{z^2-c^2}} =$ $\frac{\frac{1}{2}c^2\dot{z}}{\sqrt{z^2-c^2}}$: unde constat sectorem CBE esse fluentem quantitatis $\frac{\frac{1}{2}c^2\dot{z}}{\sqrt{z^2-c^2}}$. Præterea si BT tangens Hyperbolam Axi transverso occurrat in T, ex natura Hyperbolæ fit $CE : CV :: CV : CT$, hoc est $z : c :: c : \frac{c^2}{z} = CT = x$. Fig. VIII.

Hinc deducimus sequentem constructionem. Centro C, semiaxe transverso $CV = c$, describatur Hyperbola æquilatera VB, & circulus CeG ex centro C. Ad hyperbolam ducatur recta CB, & hyperbolæ Tangens BT axi transverso occurrat in T. Capiatur circuli sector CVe, qui sit ad sectorem Hyperbolicum CVB ut n ad 1. In Ce capiatur $CK = CT$, & erit K punctum in Curva quæsita, cujus perpendiculum è centro C ad Tangentem in K demissum, si CK dicatur x, est æquale $\frac{ax}{\sqrt{b^2-x^2}}$.

Et in hac Curva, urgente vi centripeta quæ ſit reciproce ut cubus diſtantiæ, movebitur corpus, ſi ſecundum directionem Tangentis cum juſta velocitate exeat. Qualis autem debet eſſe velocitas quæ faciat ut corpus harum Curvarum quamvis deſcribat, ſic invenietur.

Cum velocitas qua corpus in trajectoria quacunque movetur ſit reciproce ut quantitas p, aſſumendo conſtantem quamvis a, ea ſemper exponi poteſt per $\frac{a}{p}$. Et ſi ad Axem CV ordinentur rectæ quæ ſint reciproce ut cubi diſtantiarum à centro, ſeu ut vires centripetæ, & hac ratione formetur Figura curvilinea, ejus Area indefinite extenſa ſemper exponi poteſt per $\frac{b^2}{x^2}$, ut ex Quadraturis conſtat. At Area illa eſt ut quadratum velocitatis quæ acquiritur ab infinita diſtantia cadendo, adeoque velocitas hoc caſu acquiſita erit ut $\frac{b}{x}$. Hinc ſi velocitas illa dicatur y, & velocitas qua corpus in Trajectoria movetur dicatur v, taleſque aſſumantur quantitates a & b, ut in una aliqua à centro diſtantia ſit $y : v :: \frac{b}{x} : \frac{a}{p}$, erit ubique in omnibus diſtantiis $y : v :: \frac{b}{x} : \frac{a}{p} :: p : \frac{ax}{b}$. Unde ſi $y = v$, erit $p = \frac{ax}{b}$, & Curva hac velocitate deſcripta erit Spiralis Nautica; vel Circulus exiſtente $p = x$ & $a = b$.

Si y ſit major quam v, tunc p major erit quam $\frac{ax}{b}$; eritque illa, ut ex præcedentibus conſtat, $= \frac{ax}{\sqrt{b^2 - x^2}}$. Curva autem conſtruetur per ſectorem Hyperbolicum, ut in ultimo caſu oſtenſum fuit, ubi diſtantia corporis à centro per concurſum Tangentis Hyperbolæ cum Axe tranſverſo determinatur. Si

y ſit minor quam v, at in tantilla ratione ut maneat b major quam a, Curva formabitur per eundem ſectorem hyperbolicum. At diſtantia corporis à centro deſumitur ex concurſu Tangentis cum Axe conjugato.

Si ſit $y : v :: p : x$, erit in eo caſu $a = b$, & Curva evadit Spiralis Hyperbolica, ubi eſt $p = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}$. Hinc ſi de loco quovis projiciatur corpus ſecundum datam rectam, cum ea velocitate quæ ſit ad velocitatem ab infinito cadendo acquiſitam, ut diſtantia corporis à centro ad perpendicularem è centro ad lineam directionis demiſſam, movebitur illud corpus in Spirali Hyperbolica. Si denique ſit v tantò major quam y, ut ſit etiam a major quam b, Curva conſtruetur per Sectores Circulares. Atque hac ratione datâ velocitate ſemper determinari poſſit relatio quantitatum a & b, ac proinde Curva deſcribetur in qua corpus cum illa velocitate movebitur: & viciſſim data Curva, ſeu datis quantitatibus a & b, invenietur velocitas qua Curva illa deſcribitur.

Omnium Curvarum Areæ (ſi circulum excipias) quæ urgente hac vi centripetâ deſcribi poſſunt, ſunt perfecte quadrabiles. Nam primo, in ſpirali Logarithmica, quia eſt $p = \frac{ax}{b}$, erit

$KN = \frac{a\dot{x}}{\sqrt{b^2 - a^2}} = \frac{a\dot{x}}{c}$, ponendo $b^2 - a^2 = c^2$: *vid. Fig.* II.

adeoque erit triangulum $CKI = \frac{\frac{1}{2}ax\dot{x}}{c}$; cujus Fluens eſt

$\frac{ax^2}{4c}$ = Areæ Curvæ.

Si p ſit $\frac{ax}{\sqrt{b^2 + x^2}}$, & a major quam b, oſtenſum eſt eſſe KN

$= \frac{a\dot{x}}{\sqrt{x^2 - c^2}}$, unde $KN \times \frac{1}{2} CI = \frac{\frac{1}{2}ax\dot{x}}{\sqrt{x^2 - c^2}}$, cujus Fluens eſt $\frac{1}{2} a \times \sqrt{x^2 - c^2}$ = Areæ Curvæ. At ſi a minor ſit quam b, ſit $KN =$

$\frac{ax}{\sqrt{x^2+c^2}}$, & $KN \times \frac{1}{2} CI = \frac{\frac{1}{2}ax\dot{x}}{\sqrt{x^2+c^2}}$, cujus Fluens est $\frac{1}{2}a\sqrt{x^2+c^2} - Q$ = Areæ Curvæ. Ponatur $x=0$, & fiet $\frac{1}{2}ac - Q = 0$, unde $Q = \frac{1}{2}ac$, & Area Curvæ fit $= \frac{1}{2}a\sqrt{x^2+c^2} - \frac{1}{2}ac$.

In Spirali Hyperbolica evanescit quantitas c, & Area Curvæ fit $\frac{1}{2}ax$.

Si p sit $= \frac{ax}{\sqrt{b^2-x^2}}$, ostensum est esse $KN = \frac{ax}{\sqrt{c^2-x^2}}$, unde $\frac{1}{2}CI \times KN = \frac{\frac{1}{2}ax\dot{x}}{\sqrt{c^2-x^2}}$, cujus fluens est $Q - \frac{1}{2}a\sqrt{c^2-x^2}$ = Areæ. Fiat $x=0$, & erit $Q - \frac{1}{2}ac = 0$, seu $Q = \frac{1}{2}ac$; unde erit Area Curvæ semper æqualis $\frac{1}{2}ac - \frac{1}{2}a\sqrt{c^2-x^2}$. Fiat $c^2 - x^2 = 0$ seu $c = x$, & Area curvæ fit $\frac{1}{2}ac$. Unde si initium Areæ non capiatur ab initio ipsius x, seu ubi x est $=0$, sed ubi $x = c$ est maxima, hoc est si Area ab V incipiat, (*vid. Fig.* VII.) erit Area semper æqualis $\frac{1}{2}a\sqrt{c^2-x^2}$.

De Areis quas describunt corpora radiis ad centrum ductis, urgente vi centripeta quæ sit reciproce ut distantiarum cubi, sequentia adnotavit Collega meus peritissimus Geometriæ Professor *Halleius*. Nempe si corpora diversos circulos vel diversas Spirales Hyperbolicas hac lege describunt; erunt areæ sectorum, tam in Circulis quam in Spiralibus illis omnibus, æqualibus temporibus descriptæ, semper æquales: Nam velocitates corporum in circulis motorum secundum hanc legem, debent esse radiis seu distantiis reciproce proportionales, adeoque arcus simul percursi erunt quoque in eâdem radiorum reciprocâ ratione, unde statim patebit sectores simul descriptos esse æquales.

In reliquis omnibus Curvis cum sit velocitas ad velocitatem corporis in eadem distantia in circulo moti ut $\frac{a}{b} \times x$ ad p, (*vide* Fig. III.) seu ut $\frac{a}{x} \times IK$ ad KN; interea dum corpus in Trajectoria percurrit lineolam *IK*, corpus aliud in circulo in eadem distantia motum percurret arcum $\frac{b}{a} \times KN$; & Area sectoris Circuli & Trajectoriæ simul descriptæ erunt $\frac{b}{a} \times KN \times \frac{1}{2} CN$ & $KN \times \frac{1}{2} CN$, quæ duæ Areæ sunt in ratione data, scil. ut *b* ad *a*. Adeoque ubi est $a = b$, uti fit in Spirali Hyperbolica, Area sic descripta erit semper æqualis Areæ sectoris circularis in æquali tempore descriptæ.

November 24. 1713

III. *Rules for correcting the usual Methods of computing Amounts and present Values, by Compound as well as Simple Interest; and of stating Interest Accounts. Offer'd to Consideration, by* Thomas Watkins, *Gent. F. R. S.*

I. Of Compound Interest.

THE Supposition whereon the Method of computing by Compound Interest is founded; *viz.* That all Interest Money, Rents, *&c.* are or may be constantly receiv'd, and put out again at Interest, the Moment they become due, without any Charge, or Trouble, being impracticable; therefore all Computations by this Method (except of Fee-Simples or other Perpetuities) must needs be erroneous. Thus for Instance, the Amount of a Sum of Money, or Annuity, for want of Deductions out of the Profits, for the unavoidable Trouble, Charge, and Delay in the Management, will be too great: and for the same reason, the present value of a Sum of Money payable in any time to come, will be too little; also the present value of an Annuity (being only the Amount of the difference between the Annuity, and Interest of the said present value) will be too much. But in long terms of Years, as that difference becomes less so does the Error; as the term is great-

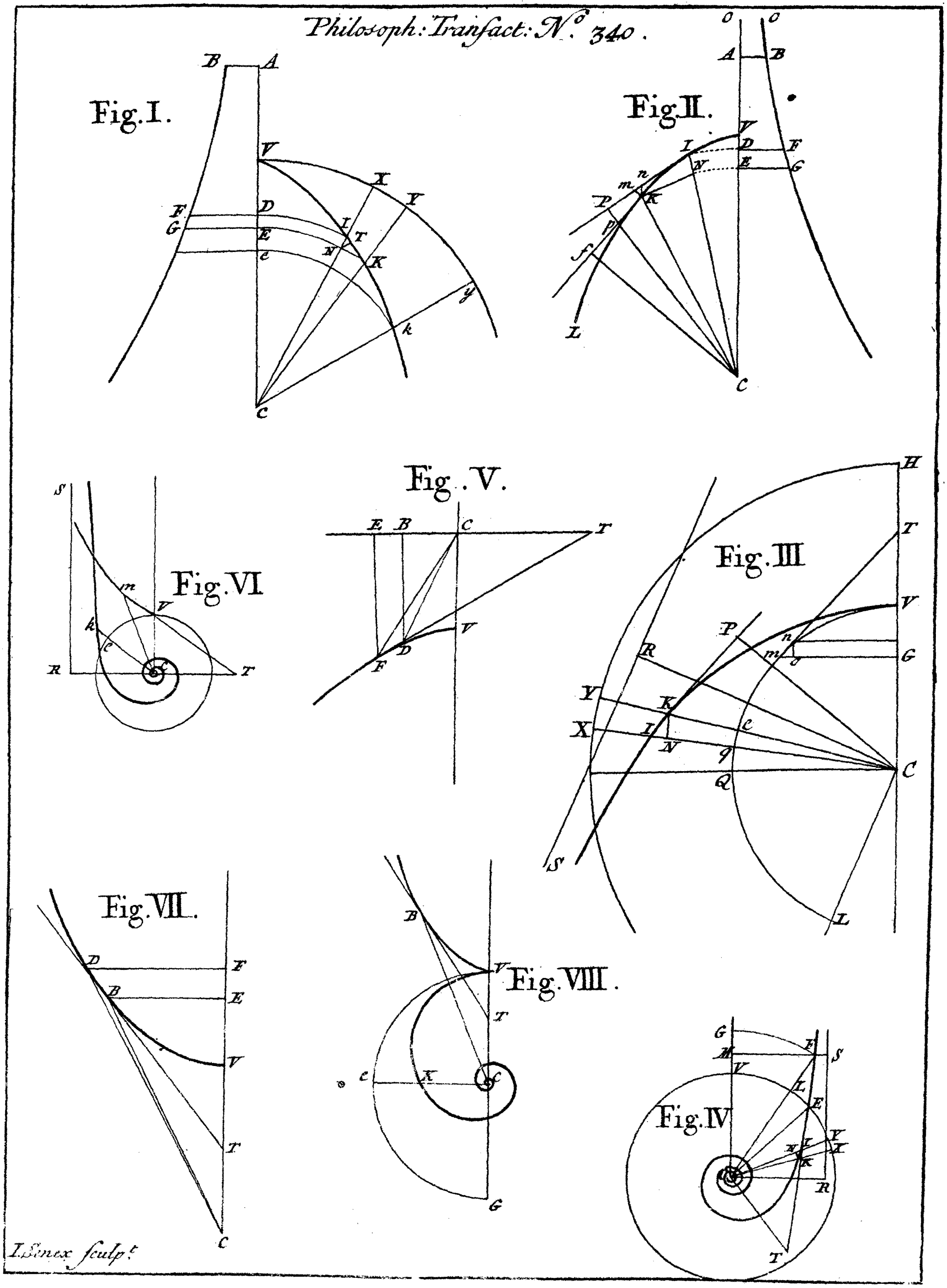
Fig. I.
Fig. II.
Fig. III
Fig. IV
Fig. V.
Fig. VI
Fig. VII.
Fig. VIII.
I. Senex sculp.